26/02/2015

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & 0 & \\ & & 3 & & \\ & 0 & & 4 & \\ & & & & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^k \begin{bmatrix} 1^k & & & & \\ & 2^k & & 0 & \\ & & 3^k & & \\ & 0 & & 4^k & \\ & & & & 5^k \end{bmatrix}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 60

Εστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$. Ο A λέγεται διαγωνίσιμος αν είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα, δηλαδή αν υπάρχει $P \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ αντιστρέψιμος ώστε $P^{-1}AP$ διαγώνιος

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 61

α) Αν ο D είναι διαγώνιος, τότε είναι και διαγωνίσιμος γιατί $D = I_\nu^{-1} P I_\nu$ είναι διαγώνιος

β) Αν D διαγώνιος και P αντιστρέψιμος, τότε και ο $A = PDP^{-1}$ είναι διαγωνίσιμος γιατί $P^{-1}AD = D$ διαγώνιος

ΠΡΟΤΑΣΗ 62

Εστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ διαγωνισιμος. Τοτε υπαρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu \in \mathbb{F}$, οχι αναγκαστικα διαφορετικα μεταξυ τους ωστε $\chi_A(x) = (-1)^\nu (x-\lambda_1)(x-\lambda_2) \cdots (x-\lambda_\nu)$

δηλαδη: A διαγωνισιμος $\Rightarrow$ $\chi_A(x)$ αναλυεται σε γινομενο πρωτοβαθμιων

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφου A διαγωνισιμος υπαρχει διαγωνιος πινακας $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_\nu \end{bmatrix}$ ομοιος με τον A. Αρα αφου ομοιοι πινακες εχουν το ιδιο χαρακτηριστικο πολυωνυμο $\chi_A(x) = \chi_D(x) =$

$$= \det \begin{bmatrix} \lambda_1 - x & & \\ & \lambda_2 - x & 0 \\ 0 & & \lambda_\nu - x \end{bmatrix} = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_\nu - x) = (-1)^\nu (x-\lambda_1) \cdots (x-\lambda_\nu)$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 63

Αν $\chi_A(x)$ δεν αναλυεται στο $\mathbb{F}[x]$ σε γινομενο πρωτοβαθμιων, τοτε ο $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ δεν ειναι διαγωνισιμος. (κριτηριο μη διαγωνισιμοτητας)

Παραδειγμα: Εστω $a \in \mathbb{R}$ και $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Εχουμε $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & a \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} =$

$x^2 - 2x + (1-a)$. Αν το $\chi_A(x)$ δεν εχει ριζα στο $\mathbb{R}$ (ισοδυναμα $\underbrace{4 - 4(1-a)}_{\text{διακρινουσα}} < 0$ ισοδυναμα $a < 0$, τοτε ο $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ δεν ειναι διαγωνισιμος

ΠΡΟΤΑΣΗ 64 (χωρις αποδειξη)

Εστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$. Τα ακολουθα ειναι ισοδυναμα

ο A ειναι διαγωνισιμος

Υπαρχει βαση του $\mathbb{F}^{\nu \times 1}$ που αποτελειται απο ιδιοδιανυσματα του A

ΑΠΟΡΙΣΜΟΣ 65

Εστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ και $e_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{\nu 1} \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ \vdots \\ b_{\nu 2} \end{pmatrix}$, $\dots$ $e_\nu \begin{pmatrix} b_{1\nu} \\ \vdots \\ b_{\nu\nu} \end{pmatrix}$

.. βαση του $\mathbb{F}^{\nu \times 1}$ ωστε ... του A με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ_i (δηλαδή $Ae_i = \lambda_i e_i$ για κάθε i)

Θέτουμε $P = [e_1 | e_2 | \ \ | e_v] = [b_{ij}]$ για $1 \le i, j \le v$ και $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \end{bmatrix}$

τότε έχουμε $P^{-1}AB = D$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 66

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\chi_A(x) = \det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} -x & 3 \\ 4 & 9-x \end{vmatrix} = (x+2)(x+5)$

$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 5$

Με υπολογισμούς $V_A(-2) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$

$V_A(5) = \left\{ \begin{bmatrix} 3x \\ 4x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$

Επομένως $V_A(-2)$ έχει βάση το $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ και το $V_A(5)$ έχει βάση το $e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Εύκολα βλέπουμε ότι e_1, e_2 βάση του $\mathbb{R}^{2\times 1}$

Άρα A διαγωνίσιμος από πρόταση 64. Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο 65, θέτουμε $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = [e_1 | e_2] \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Τότε P αντιστρέψιμος και ο

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

ΟΡΙΣΜΟΣ 67

Έστω $0 \neq V$ διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης επί του $\mathbb{F}$ και $g: V \to V$ μία γραμμική απεικόνιση. Η g λέγεται διαγωνίσιμη αν υπάρχει βάση $e = (e_1, \dots, e_v)$ του V ώστε ο πίνακας $[g]_e^e$ να είναι διαγώνιος. (Ισοδύναμα αν ο V έχει βάση που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα της

g)

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

Αν $e=(e_1,\dots,e_\nu)$ βάση του V $g=(g_1,\dots,g_\mu)$ βάση του W. $T: V \to W$ γραμμική. Τότε $[T]_e^g$ είναι ο $\mu \times \nu$ πίνακας με $[T]_e^g = [a_{ij}]$ όπου $T(e_i) = \sum_{b=1}^{\mu} a_{bi} g_b$ για κάθε $i \leq \kappa \leq \nu$

ΠΡΟΤΑΣΗ 68

Αν V διανυσματικός χώρος, όπως στον ορισμό 67 και $T: V \to V$ γραμμική τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) η f είναι διαγωνίσιμη

(ii) Για κάθε διατεταγμένη βάση $g=(g_1,\dots,g_\nu)$ του V, ο πίνακας $[T]_g^g$ είναι διαγωνίσιμος

(iii) Υπάρχει διατεταγμένη βάση $h=(h_1,\dots,h_\nu)$ του V, ώστε ο πίνακας $[T]_h^h$ είναι διαγωνίσιμος

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(i)=>(ii): Έστω $e=(e_1,\dots,e_\nu)$ διατετ. βάση του V με $[T]_e^e$ διαγώνιος. Απο Γρ Αλγ 1 $[T]_e^e = P^{-1}[T]_g^g P$ όπου $P=[id_V]_e^g$. Άρα $[T]_g^g$ διαγωνίσιμος πίνακας

(ii)=>(iii) Άμεσο

(iii)=>(i) Από υπόθεση υπάρχει $P \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ αντιστρέψιμος και διαγώνιος $D \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ ώστε $P^{-1}[T]_h^h P = D$ (*)

Απο Γρ Αλγ Ι υπάρχει διατεταγμένη βάση e του V, ώστε $P=[id_V]_e^h$. Επομένως $P^{-1} = [(id_V)^{-1}]_h^e = [id_V]_h^e$. Σαν συνέπεια, η (*) δίνει ότι $D=[id_V]_h^e \cdot [T]_h^h [id_V]_e^h = [id_V \circ T \circ id_V]_e^e = [T]_e^e$. Σαν συνέπεια $[T]_e^e$ διαγώνιος => T διαγωνίσιμη

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 69

Έστω $a \in \mathbb{R}$ με $a<0$ $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $T(x,y)=(x+y, ax+y)$. Η T είναι γραμμική. Είναι η T διαγωνίσιμη;

Έχουμε ότι $[T]_e^e = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ όπου $e_1=(1,0)$ $e_2=(0,1)$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$

(26) Αφού από παράδειγμα στο συμπέρασμα 63, ο πίνακας $\begin{bmatrix}1 & 1\\ a & 1\end{bmatrix}$, δεν είναι διαγωνίσιμος, έπεται από πρόταση 68 η T δεν είναι διαγωνίσιμη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 70

a) Έστω $W_1, W_2, \dots, W_k$ διανυσματικοί υπόχωροι πεπερ. διάστασης του δ.χ. V και $k \geq 2$. Ορίζουμε τον δ. υποχ. $W_1+W_2+\dots+W_k$ του V ως εξής. Για $k=2$ ορίζουμε με επαγωγή (όπως στη Γρ Αλγ Ι) $W_1+W_2=\{a+b,\ a\in W_1,\ b\in W_2\}$. Υποθέτουμε ότι $W_1+\dots+W_{k-1}$ έχει οριστεί και θέτουμε $W_1+W_2+\dots+W_k=(W_1+W_2+\dots+W_{k-1})+W_k$
Εύκολα βλέπουμε ότι το $W_1+\dots+W_k$ είναι υπόχωρος του V, είναι ο ελάχιστος υπόχωρος του V που περιέχει κάθε W_i και ότι $W_1+W_2+\dots+W_k = \{a_1+a_2+\dots+a_k \text{ με } a_i\in W_i\}$

b) Λέμε ότι το άθροισμα $W_1+\dots+W_k$ είναι ευθύ αν $\dim_F(W_1+\dots+W_k)=\dim_F W_1+\dots+\dim_F W_k$

ΠΡΟΤΑΣΗ 71

Έστω $W_1,\dots,W_k$ υπόχωροι του V, με $V\neq\{0_V\}$ πεπερασμένης διάστασης. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) Το άθροισμα $W_1+\dots+W_k$ είναι ευθύ
(ii) Για κάθε $i=1,2,\dots,k$ $W_i\cap(W_1+\dots+W_{i-1}+W_{i+1}+\dots+W_k)=\{0_V\}$
(iii) Αν $\bar{e}_i$ βάση του W_i τότε το σύνολο $\bar{e}_1\cup\bar{e}_2\cup\dots\cup\bar{e}_k$ είναι γρ. ανεξ.
(iv) Αν $w\in W_1+W_2+\dots+W_k$ τότε υπάρχουν μοναδικά $w_i\in W_i$ ώστε $w=w_1+\dots+w_k$

Αποδ. Άσκηση